GENERÁLNA SKÚŠKA NKMS 2004 – EXTERNÁ ČASŤ

ŠPÚ

M A T E M A T I K A

úroveň A
kód testu: 1070

NEOTVÁRAJTE, POČKAJTE NA POKYN!
PREČÍTAJTE SI NAJPRV POKYNY K TESTU!

- Test obsahuje **30 úloh**.
- V teste sa stretnete s dvoma typmi úloh:
  - Pri úlohách s výberom odpovede vyberiete správnu odpoveď spomedzi niekoľkých ponúkaných možnosti, z ktorých je vždy správna iba jedna. Správnu odpoveď zaznačíte krížikom do príslušného políčka odpoveďového hárka.
  - Pri úlohách s krátkou odpoveďou napíšete jednotlivé číslice výsledku do príslušných políčok odpoveďového hárka. Rešpektujte pritom predtlačenú polohu desatinnej čiarky.
- Z hľadiska hodnotenia sú všetky úlohy rovnocenné.
- Na vypracovanie testu budete mať **120 minút**.
- Pri práci smiete používať iba písacie potreby, kalkulačku a prehľad vzorcov, ktorý je súčasťou tohto testu. Nesmiete používať zošity, učebnice ani inú literatúru.
- Poznámky si robte na pomocný papier. Na obsah pomocného papiera sa pri hodnotení neprihliada.
- Podrobnejšie pokyny na vypĺňovanie odpoveďového hárka sú na poslednej strane testu. Prečítajte si ich.
- Pracujte rýchlo, ale sústreďte sa.

Želáme Vám veľa úspechov!

Začnite pracovať, až keď dostanete pokyn!

Časť I

V každej z úloh **01** *až* **10** *je správna práve jedna z ponúkaných odpovedí* **(A)** *až* **(E)**. *Svoju odpoveď zaznačte krížikom v príslušnom políčku odpoveďového hárka.*

01 Množinou všetkých kladných riešení nerovnice $x^{20} > 3^{900} \cdot x^5$ je interval

(A) $(0\,;3^{60})$. **(B)** $(3^{60}\,;\infty)$. **(C)** $(0\,;3^{225})$. **(D)** $(3^{225}\,;\infty)$. **(E)** $(3^{885}\,;\infty)$.

02 Ak *M* je množina všetkých $x \in R$, pre ktoré nadobúda logaritmická funkcia

$$f : y = \log_{0,2}(4x-1)$$

kladné funkčné hodnoty, tak *M* =

(A) $(0{,}25;0{,}5)$. **(B)** $(0;0{,}5)$. **(C)** $(0{,}5;\infty)$. **(D)** $(0{,}3;\infty)$. **(E)** $(0{,}25;\infty)$.

03 Funkcia $y = x^6 + 7x^3 - 8$

(A) má minimum rovné $-\sqrt[3]{3{,}5}$.

(B) má minimum rovné -8.

(C) má minimum rovné $-20{,}25$.

(D) má minimum rovné $-44{,}75$.

(E) nemá minimum.

04 Ak predpis funkcie $f : y = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$, pričom $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right)$, vyjadríme pomocou $t = \cos x$,

dostaneme *y* =

(A) $2t^2 - 1$. **(B)** $1-2t^2$. **(C)** $\dfrac{1}{2t^2-1}$. **(D)** $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. **(E)** $\dfrac{t^2}{2-t^2}$.

05 V prvej sýpke bolo uskladnených *x* ton obilia, v druhej sýpke trikrát menej. Z prvej sýpky sa denne expedovalo 8 ton obilia, z druhej sýpky štyrikrát menej. Za *d* dní bolo v obidvoch sýpkach rovnaké množstvo obilia. Aký je vzťah medzi *x* a *d* ?

(A) $x = 12d$ **(B)** $x = 9d$ **(C)** $x = 8d$ **(D)** $x = \dfrac{d}{12}$ **(E)** $x = \dfrac{9}{d}$

06 Mama sa chystá piecť koláče. Ostatní členovia rodiny vyslovili tieto želania:

Otec: „*Upeč makovník alebo orechovník.*“

Syn: „*Ak upečieš orechovník, tak upeč aj makovník alebo buchty.*“

Dcéra: „*Ak upečieš buchty aj makovník, tak nepeč orechovník.*“

Mama napokon upiekla len orechovník. Komu splnila želanie?

(A) Otcovi, synovi aj dcére.

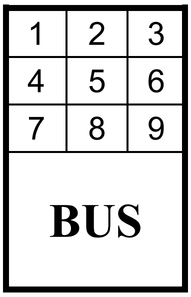
(B) Ani otcovi, ani synovi, ani dcére.

(C) Len otcovi a dcére.

(D) Len otcovi a synovi.

(E) Len synovi a dcére.

07 Koľko rôznych kombinácií môžeme nastaviť na dierkovači cestovných lístkov, ak dierkovač vydierkuje štyri alebo päť z číslic 1 až 9?



(A) 18 144

(B) 15 876

(C) 2 880

(D) 252

(E) 126

08 Pravdepodobnosť, že pán Kaufmann príde na obchodnú schôdzku s pánom Rýchlym načas, je 80 %. Pravdepodobnosť, že načas príde pán Rýchly, je 70 %. Aká je pravdepodobnosť, že na schôdzku príde načas len jeden z nich?

(A) 44 % **(B)** 38 % **(C)** 24 % **(D)** 14 % **(E)** 6 %

09 Bod V je vzdialený 25 cm od stredu kružnice k, ktorá má polomer 10 cm. Bodom V môžeme viesť dve dotyčnice ku kružnici k. Akú veľkosť (s presnosťou na stotiny stupňa) má uhol α, ktorý zvierajú tieto dotyčnice?

(A) $\alpha = 23{,}58°$ **(B)** $\alpha = 43{,}60°$ **(C)** $\alpha = 47{,}16°$

(D) $\alpha = 66{,}42°$ **(E)** $\alpha = 132{,}84°$

10 Aká je vzájomná poloha kružníc $k: x^2 + y^2 = 625$ a $m: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 400$?

(A) Kružnice k, m nemajú spoločné body.

(B) Kružnice k a m sa dotýkajú zvonku.

(C) Kružnica k sa dotýka zvnútra kružnice m.

(D) Kružnica m sa dotýka zvnútra kružnice k.

(E) Kružnice k, m majú dva spoločné body.

Test pokračuje na ďalšej strane

Časť II

V úlohách **11 – 30** *Vám neponúkame žiadne možnosti. Každú úlohu vyriešte samostatne. Uveďte vždy* ***iba výsledok*** *– nemusíte ho zdôvodňovať ani uvádzať postup, ako ste k nemu dospeli.*

- *Výsledok zapisujte do odpoveďového hárka* **pomocou desatinných čísel.**
- *Pri zápise rešpektujte predtlačenú polohu desatinnej čiarky.*
- *Znamienko* **–** (*mínus*) *napíšte do samostatného políčka pred prvú číslicu.*
- *Ak je Váš výsledok celé číslo, nevypĺňajte políčka za desatinnou čiarkou.*
  Napríklad

výsledok –33,1	*zapíšte*	[ ][ ][–][3][3] , [1][ ][ ][ ]
výsledok 5	*zapíšte*	[ ][ ][ ][ ][5] , [ ][ ][ ][ ]
výsledok 427,19	*zapíšte*	[ ][ ][4][2][7] , [1][9][ ][ ]

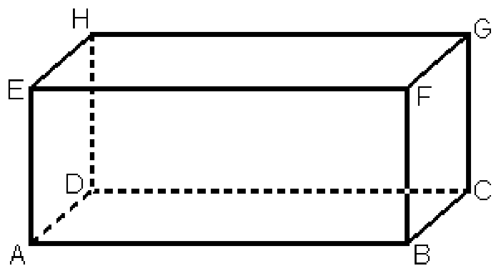
11 Aký najväčší obsah (v cm^2) môže mať trojuholník ABC, v ktorom má strana a dĺžku 7 cm a ťažnica t_a na stranu a dĺžku 16 cm?

12 Nech S je priesečník uhlopriečok lichobežníka $ABCD$, ktorého základne majú dĺžky: $|AB| = 6$ cm, $|CD| = 3$ cm. Vypočítajte (v cm^2) obsah trojuholníka ABS, ak viete, že obsah trojuholníka CDS je 13 cm^2.

13 V pravidelnom 18-uholníku $A_1A_2 \dots A_{18}$ určte (v stupňoch) veľkosť uhla $A_1A_9A_2$.

14 Daný je kváder $ABCDEFGH$, v ktorom $|AB| = 12$ cm, $|AD| = 3$ cm, $|AE| = 5$ cm.

Vypočítajte (v cm^2) obsah rezu tohto kvádra rovinou AFG.



15 Vieme, že pre vhodné reálne číslo a sa funkcia $f : y = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{4}{x+2}$ rovná funkcii $g : y = \dfrac{6x}{x^2 + x - 2}$. Vypočítajte číslo a.

16 Funkcia $f : y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$ je na intervale $\left(-\infty ; -\dfrac{1}{2}\right\rangle$ klesajúca a na intervale $\left\langle -\dfrac{1}{2}; \infty\right)$ rastúca. Nájdite najväčšiu hodnotu tejto funkcie na intervale $\left\langle -\dfrac{4}{3} ; \dfrac{4}{3}\right\rangle$.

17 V poslucharni je 1 000 miest na sedenie. Tie sú usporiadané do 10 radov tak, že počty sedadiel v jednotlivých radoch tvoria aritmetickú postupnosť. V prvom rade je 46 sedadiel. Koľko sedadiel je v poslednom rade?

18 Rovnica $\sqrt{2y-5} = 10 - y$ má jediný reálny koreň. Nájdite ho.

19 Ktoré reálne číslo <u>nepatrí</u> do oboru hodnôt funkcie $f : y = \dfrac{4x+2}{5x-1}$?

20 Na aké číslo treba zmeniť číslo 4 v rovnici $5^x = 4$, aby nová rovnica mala koreň o 3 väčší než pôvodná rovnica?

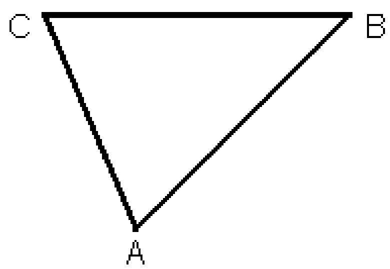
21 Určte najväčší spoločný deliteľ čísel $\dfrac{20!}{17!}$ a 700.

22 Číslo n je spomedzi nameraných hodnôt 3, n, 5, 11, 7, 8, 10, 11, 11 najväčšie. Určte hodnotu n, ak viete, že medián týchto čísel sa rovná ich aritmetickému priemeru.

23 Výraz $\dfrac{-x^2+x+6}{x-p}$ sa dá krátiť pre dve hodnoty p. Určte ich.

24 Na obrázku je znázornený trojuholník ABC, v ktorom: $B[0\,;0]$, $C[-10\,;0]$, $|\angle ABC| = 45^\circ$ a výška na stranu BC má dĺžku 7.

Zistite súradnice vrchola $A[x_A; y_A]$.



25 Číslo $a \in R$ sme zvolili tak, aby $x = \dfrac{5\pi}{8}$ bolo jedným z riešení rovnice $\sin x = a$. Nájdite súčet všetkých <u>zvyšných</u> riešení tejto rovnice v intervale $\langle 0;\, 4\pi \rangle$. Výsledok napíšte v tvare $k \cdot \pi$, kde k je vhodný zlomok v základnom tvare.

26 Graf lineárnej funkcie f má smernicu $k = 0{,}4$ a pretína os y v bode $[0\,;-4]$. Nech g je inverzná funkcia k funkcii f. Zistite súradnice bodu $A[x_A; y_A]$, v ktorom graf funkcie g pretína os y.

Test pokračuje na ďalšej strane

27	Pre ktoré čísla a, b je priamka daná rovnicou $y = ax + b$ dotyčnicou grafu funkcie $f : y = x^3 - 2x^2 + 7x + 3$ v bode $[2 ; 17]$?
28	Vypočítajte objem kužeľa, ktorý vznikne rotáciou pravouhlého trojuholníka ABC s vrcholmi $A[0 ; 0]$, $B[6 ; 8]$, $C[0 ; 12{,}5]$ okolo priamky BC. Výsledok uveďte zaokrúhlený na tri desatinné miesta.
29	Vypočítajte uhol priamky prechádzajúcej bodmi $A[1 ; -1 ; 0]$, $B[2 ; 1 ; -2]$ a roviny určenej súradnicovými osami x, z. Výsledok uveďte v radiánoch zaokrúhlený na tri desatinné miesta.
30	Prvé tri čísla z desaťčlenného súboru majú geometrický priemer $0{,}25$; geometrický priemer ďalších troch je 1 a geometrický priemer zvyšných čísel je 32. Vypočítajte geometrický priemer všetkých čísel súboru. Výsledok uveďte zaokrúhlený na tri desatinné miesta.

KONIEC TESTU

Prehľad vzorcov

Mocniny:

$a^x.a^y = a^{x+y}$ $\quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\quad (a^x)^y = a^{x.y}$ $\quad (a.b)^x = a^x.b^x$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ $\quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $\quad a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

Goniometrické funkcie:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\sin 2x = 2.\sin x.\cos x$ $\quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Trigonometria:

Sínusová veta: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$ $\quad$ Kosínusová veta: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$

Logaritmus: $\log_z(x \cdot y) = \log_z x + \log_z y$ $\quad \log_z \frac{x}{y} = \log_z x - \log_z y$

$\log_z x^k = k.\log_z x$ $\quad \log_y x = \frac{\log_z x}{\log_z y}$

Aritmetická postupnosť: $a_n = a_1 + (n-1).d$ $\quad s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Geometrická postupnosť: $a_n = a_1.q^{n-1}$ $\quad s_n = a_1\frac{q^n - 1}{q - 1},\ q \neq 1$

Kombinatorika: $P(n) = n!$ $\quad V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$ $\quad C(k,n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$P'(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$ $\quad V'(k,n) = n^k$ $\quad C'(k,n) = \binom{n+k-1}{k}$

Geometrický priemer: $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$ $\quad$ Harmonický priemer: $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$

Analytická geometria:

Parametrické vyjadrenie priamky: $X = A + t\vec{u},\ t \in R$

Všeobecná rovnica priamky: $ax + by + c = 0$; $[a; b] \neq [0; 0]$

Smernicový tvar rovnice priamky: $y = ax + b$

Parametrické vyjadrenie roviny: $X = A + t\vec{u} + s\vec{v},\ t,s \in R$

Všeobecná rovnica roviny: $ax + by + cz + d = 0$; $[a; b; c] \neq [0; 0; 0]$

Stredový tvar rovnice kružnice: $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$

Objemy a povrchy telies:

	kváder	valec	ihlan	kužeľ	guľa
objem	abc	$\pi r^2 v$	$\frac{1}{3}S_p v$	$\frac{1}{3}\pi r^2 v$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
povrch	$2(ab + ac + bc)$	$2\pi r(r + v)$	$S_p + Q$	$\pi r(r + s)$	$4\pi r^2$

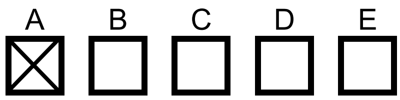
Pokyny na vypĺňovanie odpoveďového hárka

Odpoveďové hárky budú skenované.
Aby skener vedel prečítať Vaše odpovede, musíte dodržať nasledujúce pokyny:

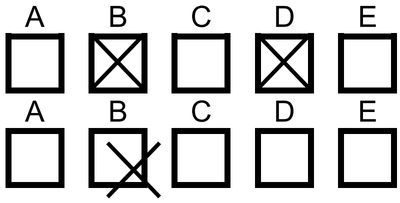
- Píšte perom s čiernou alebo modrou náplňou. Nepoužívajte tradičné plniace perá, veľmi tenko píšuce perá, obyčajné ceruzky ani pentelky.
- Textové polia (kód školy, kód testu, kód žiaka, …) vyplňujte veľkými písmenami alebo číslicami podľa predpísaného vzoru. Vpisované údaje nesmú presahovať biele pole určené na vpisovanie.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	R	S
T	U	V	X	Y	Z			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

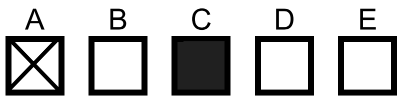
- Riešenia úloh s výberom odpovede zapisujte krížikom ☒.
- Správne zaznačenie odpovede **(A)**



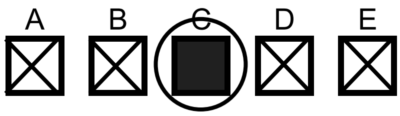
- **Nesprávne** zaznačenie odpovede **(B)**



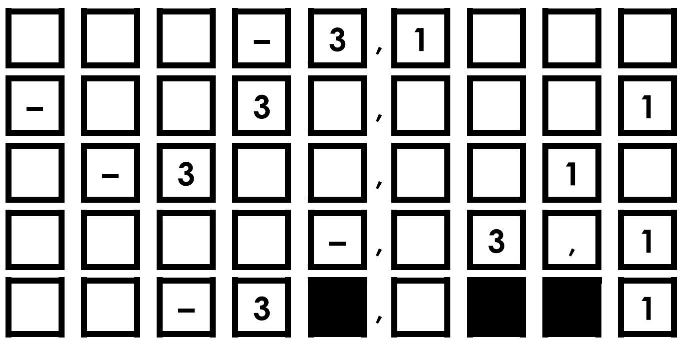
- Keď sa pomýlite alebo neskôr zmeníte názor, úplne zaplňte políčko so zlým krížikom a urobte nový krížik.



- Ak opäť zmeníte názor a chcete zaznačiť pôvodnú odpoveď, urobte krížiky do všetkých políčok a zaplnené políčko dajte do krúžku.



- Jednotlivé číslice riešenia úlohy s krátkou odpoveďou napíšte do príslušných políčok podľa predpísaného vzoru. Rešpektujte pritom predtlačenú polohu desatinnej čiarky. Do políčka napíšte najviac jednu číslicu, resp. znak „+“ alebo „–“.
- Správne zapísaný výsledok –3,1
- **Nesprávne** zapísaný výsledok –3,1
- Oprava predchádzajúceho zápisu –3,1



Neotvárajte test, pokiaľ nedostanete pokyn!